TITLE:

ある多値論理関数の性質とその構造 (多値論理およびその応用)

AUTHOR(S):
古賀, 義亮; 村木, 正博

CITATION:
古賀, 義亮 ...[et al]. ある多値論理関数の性質とその構造 (多値論理およびその応用). 数理解析研究所講究録 1982, 455: 22-39

ISSUE DATE:
1982-03

URL:
http://hdl.handle.net/2433/103028

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
455巻 1982年 22-39

ある多値論理関数の性質とその構造

防衛大学校　古賀　義亮
村木　正博

1　まえがき

0，1，φの3値をとるx，y，zの3つの変数を考える。この変数はお互いに関係があり、1変数関数あるいは2変数関数の関係をもつものとする。重複を許してこれらの関数を取り出し、任意の変数間にその関数を割り当てることにより、3つの変数の間に各種の関係を得ることができる。これをT関数と呼ぶことにする。T関数は、任意の3個のT関数による△合成と呼ぶ方法を用いれば、任意のT関数と等価な関係を得ることができる。

本論文は、△合成によって任意のT関数と等価な関係を得ることを目的として、必要最小限の関数を変数間に割り当てたT関数をT′関数と呼び、T′関数のそれぞれの持つ性質を明らかにし、任意のT関数と等価な関係を構成するための必要十分な条件を明らかにする。

2　T関数とΔ合成

T関数及びΔ合成の変数の識別を明らかにし、T関数及びΔ合成を検討する上での条件を示す。

2.1　T関数と各関数

〔定義1〕　変数置換記号

T関数の3つの変数をx，y，zとして表わす。このときx，y，zは置換可能とする。x，y，zの置換は群をなし、置換の方法は6通りありσ_i（$i = 0 \sim 5$）と表わす。

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

〔定義2〕　同形なT関数

任意のT関数を$t_j (j=1,\cdots,n)$とするとき、このT関数の変数をσ_iで置換することを$\sigma_i t_j$と表わす。ここで任意の2つのT関数をt_1，t_2としたとき$\sigma_i t_1 = t_2$であればt_1とt_2は同形であると呼び、同じT関数として扱う。

定義1，2から本論文において任意の1つの変数に関する考察は変数xで、任意の2つの変数に関する考察は、変数x，yで代表して行うものとする。

〔定義3〕　α，β，γ関数

T関数の3つの変数の間の関係において、1つの1変数関数のみによる関数をα関数、1つの変数によって残りの2つの変数が定まる2つの1変数関数をβ関数、2変数関数をγ関数という。

α関数は、$y=f(x|x\neq\varphi, y=\varphi, z=\varphi)$ (以下 $y=f(x)$)と表わす。

β関数は、$y,z=f(x|x\neq\varphi, y=\varphi, z=\varphi)$ (以下$y,z=f(x)$)と表わす。

γ関数は、$z=g(x,y|x\neq\varphi, y\neq\varphi, z=\varphi)$ (以下 $z=g(x,y)$)と表わす。

〔定義4〕　関数関係がないときの表現

ある変数$i(i=x,y,z)$について関数関係がないとき、これを$\varphi(i)$と表わす。

〔定義5〕　T関数の一般的表現

T関数は、[xを変数とする関数，yを変数とする関数，zを変数とする関数] と表わす。

2・2 Δ合成とα，β，γ関数と等価なΔ合成

〔定義6〕　Δ合成

任意の3個のT関数をP_x，P_y，P_zと表わす。

P_xの変数をx，l，n

P_yの変数をl，y，m

P_zの変数をn，m，z

とし、P_x，P_y，P_zの関数を合成し、変数x，y，zを対応させることをΔ合成と呼ぶ。

〔定義７〕　等価なΔ合成

任意の関数をF，任意のT関数をt_iとすれば、任意のΔ合成のx，y，zの関係がF又はt_iと等しいとき、そのΔ合成はF又はt_iと等価なΔ合成という。

たとえばP_xに$l=f(x)$，P_yに$y=f(l)$が存在すれば、$y=f\{f(x)\}$となり$y=f(x)$と等価なΔ合成となる。

〔定義８〕　Δ合成の一般的表現

Δ合成は、$P_x \triangle P_y \triangle P_z$と表わす。

〔定義９〕　α，β，γ関数と等価なΔ合成

α，β，γ関数と等価なΔ合成は、それぞれ３種類あり、$\hat{\alpha}_i$，$\hat{\beta}_i$，$\hat{\gamma}_i$（$i=1$～３）と表わす。$\hat{\alpha}_i$，$\hat{\beta}_i$，$\hat{\gamma}_i$（$i=1$～３）を次に示す。

$\hat{\alpha}_1$：$[l=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \triangle [\varphi(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

$\hat{\alpha}_2$：$[n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), \varphi(y), y=f(m)] \triangle [m=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

$\hat{\alpha}_3$：$[l,n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=g(l,m), \varphi(y), y=g(l,m)] \triangle [m=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

$\hat{\beta}_1$：$[l,n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \triangle [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

$\hat{\beta}_2$：$[l=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y,m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \triangle [\varphi(n), z=f(m), \varphi(z)]$

$\hat{\beta}_3$：$[l,n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y,m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \triangle [z=g(n,m), z=g(n,m), \varphi(z)]$

$\hat{\gamma}_1$：$[n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), m=f(y), \varphi(m)] \triangle [z=g(n,m), z=g(n,m), \varphi(z)]$

$\hat{\gamma}_2$：$[n=g(x,l), n=g(x,l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), l=f(y), \varphi(m)] \triangle [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

$\hat{\gamma}_3$：$[n=g(x,l), n=g(x,l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), l,m=f(y), \varphi(m)] \triangle [z=g(n,m), z=g(n,m), \varphi(z)]$

3　T′関数の生成

〔定義10〕　T′関数

α，β，γ関数から重複を許して2個の関数を取り出し、ある任意の変数i（$i=x$，y，z）について、iを変数とする関数、又は他の変数でiを定める関数がないように変数間に関数を割り当てたT関数をT′関数という。

α，β，γ関数から重複を許して関数を取り出し、それを変数間に割り当てることによりT関数を生成するものと考える。この場合、取り出す関数の数はたかだか3個である。1個の関数のみを取り出し割り当てたT関数は、任意の変数をiとすれば、iを変数とする、又はiを定める関数は共に存在しない。従ってこのようなT関数を用いて、いかに△合成しようともiを変数とする、又はiを定める関数が共に存在するT関数と等価な△合成はできない。△合成においてiを変数とする、又はiを定める関数が共に存在する必要条件は、i以外の変数をjとし、f，gの関数をFとすれば、$i=F(j)$，$j=F(i)$が共に存在することである。従って任意のT関数と等価な△合成を行うための最小の関数の数は、2個といえる。

定義10からT′関数の生成を行う。α，β，γ関数から重複を許した2個の関数の取り出しは、次に示す6通りがある。

(1)　2つのα　　(2)　αとβ　　(3)　2つのβ

(4) αとγ　(5) βとγ　(6) 2つのγ

この取り出し方法のうち(5)は、任意の変数iを変数とする、又はiを定める関数が共に存在してしまうのでT'関数ではない。

〔補題1〕　2つのαを割り当てるT'関数は3種類ある。

（証明）　変数xとyにα関数の変数を割り当てることにする。このとき変数xには$y=f(x)$か$z=f(x)$を、変数yには$x=f(y)$か$z=f(y)$を割り当てることができる。従って

(1) $[y=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$　(2) $[y=f(x),\ x=f(y),\ \varphi(z)]$

(3) $[z=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$　(4) $[z=f(x),\ x=f(y),\ \varphi(z)]$

の4つのT'関数を得ることができる。ここで(4)のT'関数を、σ_1で置換すると$[y=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$となり(1)と同形であることが分る。従って3種類のT'関数を得ることができる。

（証明終り）

ここで(1)をT_1'，(2)をT_2'，(3)をT_3'と表わす。

〔補題2〕　αとβを割り当てるT'関数は2種ある。

変数xにβ関数、変数yにα関数の変数を割り当てることにする。変数xのβ関数は$y, z=f(x)$，変数yのα関数には$x=f(y)$か$z=f(y)$を割り当てることができる。従って

(1) $[y, z=f(x),\ x=f(y),\ \varphi(z)]$　(2) $[y, z=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$

の2つのT'関数を得ることができる。　（証明終り）

ここで(1)をT_4'，(2)をT_5'と表わす。

〔補題3〕　2つのβを割り当てるT'関数は1種類のみである。

（証明）　変数x，yにβ関数の変数を割り当てることにする。変数xのβ関数は$y, z=f(x)$，変数yのβ関数は$x, z=f(y)$を割り当てることができる。従って

$[y, z=f(x),\ x, z=f(y),\ \varphi(z)]$を得ることができる。(証明終り)

このT′関数をT_6'と表わす。

〔補題4〕　αとγを割り当てるT'関数は1種類のみである。

（証明）　γ関数は、$z=g(x, y \mid x \neq \varphi,\ y \neq \varphi,\ z=\varphi)$である。つまり$x \neq \varphi$，$y \neq \varphi$が共に成立するとき、この関数が成立する。$z=g(x, y)$が存在するT関数に$y=f(x)$を割り当てることを考える。$x \neq \varphi, y=\varphi, z=\varphi$のとき$y=f(x)$が成立し、$x \neq \varphi, y \neq \varphi, z=\varphi$のとき$z=g(x, y)$が成立する。このように変数$x$を変数とする関数が、変数の値によって変化することを順序回路的機能という。本論文では順序回路的機能は許さないことにする。従って変数xにα関数、変数y, zにγ関数の変数を割り当てることにする。変数xのα関数には$y=f(x)$，$z=f(x)$を、変数y, zのγ関数には$x=g(y, z)$を割り当てることができる。従って

(1) $[y=f(x),\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$ (2) $[z=f(x),\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$
の２つのT′関数を得ることができる。ここで(2)をσ_3で置換すると$[y=f(x),\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$となり(1)と同形であることが分る。

(証明終り)

ここで(1)をT_7'と表わす。

〔補題5〕 ２つのγを割り当てるT′関数は１種類のみである。

（証明） 変数x, yにγ関数の変数を割り当てることにする。このときもう１つのγ関数の変数は変数y, zかx, zに割り当てることができる。従って

(1) $[z=g(x,y),\ z=g(x,y)\ \&\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$

(2) $[z=g(x,y)\ \&\ y=g(x,z),\ z=g(x,y),\ y=g(x,z)]$

の２つのT′関数を得ることができる。ここで任意の変数iを変数とする関数が２つ存在するとき、&記号を使用して共に表わすことにする。(2)をσ_1で置換すると$[z=g(x,y),\ z=g(x,y)\ \&\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$となり(1)と同形であることが分る。

(証明終り)

ここで(1)をT_8'と表わす。

4 T関数の基本的性質

T関数に関する諸定義を行い、各関数の基本的性質及び、すべてのT′関数と等価なΔ合成を検討し、Δ合成におけるT

関数の基本的性質を明らかにする。

〔定義11〕　2つのT関数の関係

t_1，t_2を任意の2つのT関数とするとき、t_1の関数がt_2の関数に含まれ、しかもt_1と同じT関数としてΔ合成に用いることが可能なとき、t_2はt_1のT関数を持つという。

〔定義12〕　T関数の包含

(1)　t_1，t_2を任意の2つのT関数とする。t_2はt_1のT関数を持ち、しかもt_2自身でt_1と等価なΔ合成ができるとき、t_2はt_1を包含するという。

(2)　t_2はt_1のT関数を持ち、t_2とt_1以外のT関数でt_1と等価なΔ合成ができるとき、t_2はt_1を条件付包含するという。

(3)　t_2にt_1のT関数は含まれるが、T関数を持たないときt_2はt_1を虚に包含するという。

〔定義13〕　生成集合と基底

T関数からなる集合をSとする。$S=\{t_i|i=1,\cdots,n\}$の任意の部分集合をS_kと表わす。S_kの任意の要素によるΔ合成で合成される等価なT関数の集合$K=\{t_j|j=1,\cdots,p\}$と表わす。$K=S$となる場合、集合S_kをSの生成集合と呼ぶ。この生成集合の中で構成要素数が最小である集合をSの基底と呼ぶ。

〔定義14〕　T関数の同値

t_1，t_2を任意の2つのT関数とするとき、集合S_kに対して

$t_1 \cup S_k$が集合Sの生成集合なら、$t_2 \cup S_k$も集合Sの生成集合で、かつ$t_1 \cup S_k$が集合Sの非生成集合なら$t_2 \cup S_k$も集合Sの非生成集合であるとき、t_1とt_2は同値であると呼ぶ。

〔補題6〕　β又はγ関数と等価なΔ合成には、βはβ，γはγ関数のT関数を持つT関数を必要とする。

（証明）　定義8に示されているように$\hat{\beta}_i$，$\hat{\gamma}_i$（$i=1\sim3$）には、P_x，P_y，P_zのいずれかにβはβ、γはγ関数を持つT関数が含まれている。　（証明終り）

〔補題7〕　β関数1つのみを割り当てたT関数のΔ合成で、α関数1つのみを割り当てたT関数と等価なΔ合成ができる。

（証明）　P_zに$z=f(m)$，$z=f(n)$が存在しないΔ合成を考えればよい。$[l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \Delta [y, m=f(l), \varphi(y), \varphi(m)] \Delta [\varphi(n), \varphi(m), n, m=f(z)]$で成立する。　（証明終り）

〔補題8〕　T_1'と等価なΔ合成には、T_1'のT関数を持つT関数が必要である。

（証明）　T_1'と等価なΔ合成を考えてみる。そのためにはP_x，P_yの変数x，yにT関数の$y=f(x)$，$z=f(y)$と等価なΔ合成となる$\hat{\alpha}_i$（$i=1\sim3$）を割り当てればよい。定義8からすべての組み合わせを作ると次に示す9通りのΔ合成がある。

(1) $[l=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \triangle [\varphi(n), z=f(m), \varphi(z)]$

(2) $[l=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), l=f(y), \varphi(m)] \triangle [z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

(3) $[l=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \triangle [z=g(m,n), z=g(m,n), \varphi(z)]$

(4) $[n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), m=f(y), y=f(m)] \triangle [m=f(n), z=f(m), \varphi(z)]$

(5) $[n=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), l=f(y), y=f(m)] \triangle [m, z=f(n), \varphi(m), \varphi(z)]$

(6) $[n=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [\varphi(l), l, m=f(y), y=f(m)] \triangle [m=f(n) \& z=g(m,n), z=g(m,n),$
$\varphi(z)]$

(7) $[l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=g(l,m), m=f(y), y=g(l,m)] \triangle [m=f(n),$
$z=f(m), \varphi(z)]$

(8) $[l, n=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [y=g(l,m), l=f(y), y=g(l,m)] \triangle [m, z=f(n),$
$\varphi(m), \varphi(z)]$

(9) $[l, n=f(x), n=f(l), \varphi(n)] \triangle [y=g(l,m), l, m=f(y), y=g(l,m)] \triangle$
$[m=f(n) \& z=g(m,n), z=g(m,n), \varphi(z)]$

ここで(5), (8)は組み合わせの結果として変数xが$n=f(x)$, $m, z=f(n)$, $y=f(m)$を△合成することにより、$m, z=f\{f(x)\}$と$y=f \cdot f\{f(x)\}$のβ関数と等価になり不適当である。また(6), (9)はP_zが順序回路的機能になるため不適当である。そこで(1)〜(4), (7)について検討する。(1)のP_yにおいてlをx, mをzに置き換えれば$[y=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$となり$T_1'$と同形である。同様に(2), (3)は$P_x$, (4), (7)は$P_z$が$T_1'$と同形である。このことから$T_1'$のT関数を持つT関数を必要とすることが分る。(証明終り)

〔補題9〕　T_3'と等価な△合成には、T_3'のT関数を持つT関数が必要である。

（証明）　T_3'は〔$z=f(x)$, $z=f(y)$, $\varphi(z)$〕である。△合成によって$z=f(x)$, $z=f(y)$と等価になるためには、$z=f(m)$か$z=f(n)$またはその両方が同時に存在するか、または$z=g(m,n)$が存在する必要がある。$z=f(m)$, $z=f(n)$が同時に存在するときは、P_zが〔$z=f(n)$, $z=f(m)$, $\varphi(z)$〕となり、nをx, mをyに置き換えれば〔$z=f(x)$, $z=f(y)$, $\varphi(z)$〕となりT_3'と同形である。また$z=f(m)$のみが存在するとき、変数xは、$l=f(x)$, $m=f(l)$, $z=f(m)$を△合成して$z=f\cdot f\{f(x)\}$、変数yは$m=f(y)$, $z=f(m)$を△合成して$z=f\{f(y)\}$が成立する必要がある。このときP_yは、〔$m=f(l)$, $m=f(y)$, $\varphi(m)$〕となり、lをx, mをzに置き換えれば〔$z=f(x)$, $z=f(y)$, $\varphi(z)$〕となりT_3'と同形である。$z=f(n)$のみが存在するときも$z=f(m)$の場合と同様にP_xがT_3'と同形になる。また、$z=g(m,n)$が存在するとき、$z=f(m)$のみと$z=f(n)$のみが存在する場合が同時に成立する必要があるのでP_x, P_yが同時にT_3'と同形になる。　　　　（証明終り）

〔定義15〕　T_1', T_3'等のT関数を持つT関数

β, γ関数, T_1', T_3'のT関数を持つT関数の集合を、それぞれF_β, F_γ, R_1, R_3と表わす。またそれぞれの要素をf_β, f_γ, r_1, r_3と表わす。

〔補題10〕　γ_1と等価な△合成にはγ_1を必要とする。

（証明）　任意のγ_1は$y=f(x)$, $z=f(y)$にT_1'のT関数を持つと仮定する。この$y=f(x)$, $z=f(y)$と等価な△合成には、補題8からP_x, P_y, P_zのいずれかにγ_1が存在する。次に他の関数と等価な△合成を成立させたとする。このときP_x, P_y, P_zのいずれもがγ_1でなくなれば、$y=f(x)$, $z=f(y)$に仮定したT_1'のT関数は△合成できなくなる。従って△合成するためには、γ_1が存在しなければならない。　　　　（証明終り）

〔補題11〕　γ_3と等価な△合成にはγ_3を必要とする。

（証明）　任意のγ_3は$z=f(x)$, $z=f(y)$にT_3'のT関数を持つと仮定する。この$z=f(x)$, $z=f(y)$と等価な△合成には、補題9からP_x, P_y, P_zのいずれかにγ_3が存在する。次に他の関数と等価な△合成を成立させたとする。このときP_x, P_y, P_zのいずれもがγ_3でなくなれば、$z=f(x)$, $z=f(y)$に仮定したT_3'のT関数は△合成できなくなる。従って△合成するためには、γ_3が存在しなければならない。　　　　（証明終り）

〔定理1〕

T′関数の生成集合となる必要十分な条件は、集合にf_β, f_γ, γ_1, γ_3をすべて含むことである。

（証明）　f_β, f_γ, γ_1, γ_3として

f_β：〔$y, z=f(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$〕

fr : $[\varphi(x),\ x=g(y,z),\ x=g(y,z)]$

r_1 : $[y=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$

r_3 : $[z=f(x),\ z=f(y),\ \varphi(z)]$

を考える。補題6，10，11からこのT関数の集合は、T′関数の生成に必要な集合である。また次に示すように、このT関数のみで、すべてのT′関数と等価な△合成ができる。

T_2' : $[l=f(x),\varphi(l),x=f(m)]\triangle[y=f(l),m=f(y),\varphi(m)]\triangle[\varphi(n),n=f(m),m=f(z)]$

T_4' : $[n=f(x),x=f(l),\varphi(n)]\triangle[\varphi(l),l=f(y),y=f(m)]\triangle[m,z=f(n),\varphi(m),\varphi(z)]$

T_5' : $[l,n=f(x),\varphi(l),\varphi(n)]\triangle[y=f(l),m=f(y),\varphi(m)]\triangle[z=f(n),z=f(m),\varphi(z)]$

T_6' : $[l,n=f(x),x=f(l),\varphi(n)]\triangle[y=f(l),l,m=f(y),\varphi(m)]\triangle[z=f(n),z=f(m),\varphi(z)]$

T_7' : $[l=f(x),\varphi(l),x=f(m)]\triangle[y=f(l),m=f(y),\varphi(m)]\triangle[\varphi(n),n=g(m,z),n=g(m,z)]$

T_8' : $[l=f(x),x=g(l,m),x=g(l,m)]\triangle[y=g(l,m),l=f(y),y=g(l,m)]\triangle[\varphi(n),\varphi(m),n,m=f(z)]$

（証明終り）

ここでT_1'，T_3'はr_1，r_3と考えたT関数なので、等価な△合成は考えない。またT_6'，T_8'は△合成したT_4'，T_7'を用いて△合成する。

5　T′関数の基底

β，γ関数，T_1'，T_3'を包含又は条件付包含するT′関数を検討し、同値性をもとに類別すれば、定理1からT′関数の基底を求めることができる。

〔補題12〕　T_1'を包含するT′関数はT_4'のみである。

（証明）　T_1'のT関数を含むT'関数は、T_4', T_5', T_6'である。T_4'は[$y, z=f(x), x=f(y), \varphi(z)$]である。これを$\sigma_1$で置換すると、[$y=f(x), x, z=f(y), \varphi(z)$]となり、これを$P_y$に割り当て$P_x$に$l=f(x)$, P_zに$z=f(m)$が存在すれば、変数xは$l=f(x)$, $y=f(l)$を△合成し$y=f\{f(x)\}$, 変数yは$m=f(y)$, $z=f(m)$を△合成して$z=f\{f(y)\}$が成立し、T_1'と等価な関数を得ることができる。

T_5'は[$y, z=f(x), z=f(y), \varphi(z)$]である。$T_4'$の場合と同様に$P_y$に割り当てる。$z=f(y)$と等価な△合成を成立させるためには、$P_z$に$z=f(m)$が存在する必要がある。ここで$y=f(x)$と等価な△合成を成立するために$P_x$に$l=f(x)$が存在しているので、変数$x$は、$l=f(x)$, $y, m=f(l)$, $z=f(m)$を△合成することにより、$y, m=f\{f(x)\}$と$z=f\cdot f\{f(x)\}$が成立しβ関数を持つことになる。従ってT_5'はT_1'のT関数は持たない。

T_6'はT_4', T_5'のT関数を含む。従ってT_6'そのままでは、T_1'のT関数は持たない。そこでT_6'のみでT_4'と等価な△合成が可能か検討する。T_6'の$z=f(y)$を成立させない△合成を考えればよい。T_6'をP_yに割り当てたときP_zに$z=f(m)$が存在しなければよい。ここで$l=f(x)$, $m=f(l)$, $z=f(m)$を△合成した$z=ff\{f(x)\}$が成立しないことになり、変数xを変数とするβ関数が成立するためにはP_zに$z=f(m)$が存在する必要がある。このとき変数yは、$x=f(y)$と等価な△合成が成立するために、P_xにx, n

$=f(l)$が存在しているのでβ関数が成立することになる。このことからT_1'のT関数を持つT'関数はT_4'のみであることが分る。

T_4'は$[l, n=f(x), \varphi(l), x=f(n)] \triangle [y, m=f(l), l=f(y), \varphi(m)] \triangle [\varphi(n), n, z=f(m), m=f(z)]$の合成で$[y, z=f(x), \varphi(y), \varphi(z)]$と等価な△合成ができ、これを用いて$[l, n=f(x), \varphi(l), \varphi(n)] \triangle [y=f(l), l, m=f(y), \varphi(m)] \triangle [\varphi(n), n, z=f(m), \varphi(z)]$で$T_1'$と等価な△合成ができる。　(証明終り)

〔補題13〕　T_5'はT_3'を包含する。

(証明)　T_5'は$[y, z=f(x), z=f(y), \varphi(z)]$である。これを$P_z$に割り当て$P_x$に$n=f(x)$, P_yに$m=f(y)$が存在すれば、変数xは、$n=f(x)$, $z=f(n)$を△合成して$z=f\{f(x)\}$が、変数yは、$m=f(y)$, $z=f(m)$を△合成して$z=f\{f(y)\}$が成立する。従ってT_3'のT関数を持つ。また$[n=f(x), x, n=f(l), \varphi(n)] \triangle [y, m=f(l), m=f(y), \varphi(m)] \triangle [m, z=f(n), z=f(m), \varphi(z)]$で$T_3'$と等価な△合成ができる。

(証明終り)

〔補題14〕　T_6'はT_3'を条件付包含する。

〔補題15〕　T_6'のみの△合成では、1つのβ関数を割り当てたT関数と等価な△合成はできない。

(証明)　T_6'は$[y, z=f(x), x, z=f(y), \varphi(z)]$である。$T_5'$の場合と同様に$P_z$に割り当て$P_x$に$n=f(x)$, P_yに$m=f(y)$が存在すれば$z=f(x)$, $z=f(y)$と等価な△合成ができる。従ってT_3'のT

関数を持つ。次にT_6'のみの△合成でT_3'と等価な△合成が可能か検討する。T_5'で考えた△合成をT_6'に置き換えると変数x，yを変数とするβ関数が成立する。そこでT_6'のみでT_5'と等価な△合成ができるか検討する。T_6'の$x=f(y)$が成立しない△合成を考えればよい。T_6'をP_yに割り当てたとき、P_xに$x=f(l)$が存在しなければよい。それにはT_6'を$[n, l=f(x), \varphi(l), x, l=f(m)]$のように$P_x$に割り当てる必要がある。このとき$P_z$は、$z=f(y)$と等価な△合成が成立するために、$z=f(m)$が存在する。ここで$n=f(m)$が存在し、$m=f(y)$，$n=f(m)$，$x=f(n)$を△合成することにより$x=f \cdot f\{f(y)\}$が成立してしまうことになる。従って$T_5'$と等価な△合成はできない。また1つの$\beta$関数のみを割り当てたT関数と等価な△合成は、$x=f(y)$，$z=f(y)$が同時に成立しない△合成を実現する必要がある。これはT_4'，T_5'と等価な△合成ができないことから不可能である。(証明終り)

補題12，13，14，15からT'関数を類別する。その結果を表1に示す。ここで○で囲まれたT'関数は、条件付包含を示す。表1からf_β，f_γ，r_1，r_3をすべて含む基底を求めることができる。その結果、次に示す10組の集合を得る。

表1 T'関数の類別

F_β	T_4', T_5', T_6'
F_γ	T_7', T_8'
R_1	T_1', T_4'
R_3	T_3', T_5', T_6'

(1) T'_1, T'_5, T'_7 (2) T'_1, T'_5, T'_8
(3) T'_1, T'_6, T'_7 (4) T'_1, T'_6, T'_8
(5) T'_3, T'_4, T'_7 (6) T'_3, T'_4, T'_8
(7) T'_4, T'_5, T'_7 (8) T'_4, T'_5, T'_8
(9) T'_4, T'_6, T'_7 (10) T'_4, T'_6, T'_8

6 あとがき

0，1，φの3値をとる3つの変数x，y，zにお互に関係を持たせるT関数と呼ぶ論理を考え、その性質について考察を行った。T関数は△合成を用いれば、すべてのT関数を必要とせず、生成集合は集合にf_β，f_γ，γ_1，γ_3をすべて含むことが、必要十分な条件であることが明らかになった。

本研究で得られた論理における補題，定理は、同等な機能を持つ3ポートコンピュータネットワークの交換機能などの検討に応用できるものと考える。

文献

(1) 古賀，児島："3ポート論理素子"信学論(D)，J61-D，6，PP373～380（昭53-06）

(2) 鈴木，山根，古賀："3ポート論理回路網の応答とその表現"信学論(D)，J63-D，12，PP994～1001